大阪大学工学部 平成 27 年実施 数学 過去問回答

高専生向け大学編入サポート
サポーター：RW

2021/03/21

第 1 問

(1)

$Z=2$ を代入して

$$x^2+y^2+x+y-2=0$$
$$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$$

これは $(x,\ y)=(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\sqrt{\frac{5}{2}}$ の円であり、その円周は明らかに

$$2\pi\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}\pi$$

(2)

$$x^2+y^2-Z^2+x+y+2=0$$

を z について解いて

$$z=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

(1) で求めた領域を D とすると、求める体積は

$$\iint_D\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dxdy$$

$x+\frac{1}{2}=X$、$y+\frac{1}{2}=Y$ とおき、この時の積分領域を D' とすると

$$\iint_D\sqrt{(X)^2+(Y)^2+\frac{3}{2}}dxdy$$

次に極座標変換を施して

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\sqrt{r^2+\frac{3}{2}}rdrd\theta$$

これを解いて

$$\frac{2}{3}\pi\left\{8-\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\right\}$$

(3)

ラグランジュの未定乗数法を用いる

ラグランジュ関数は

$$L_{(x,\ y,\ z,\ \lambda)}=x+y-2z-\lambda\{x^2+y^2-Z^2+x+y+2\}$$

最大値の候補は

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

これを解いて

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 2$$

第 2 問

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} &= -2x - 2y + \cos 2t \\ &= -2\frac{dy}{dt} - 2y + \cos 2t\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \cos 2t \qquad ①$$

①の補助方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda = -1 \pm i$$

よって①の補助方程式の一般解は

$$y(t) = e^{-t}\{C_1 \cos t + C_2 \sin t\}$$

次に①の特殊解を $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ とおき、これから求めた $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ を①に代入すると

$$(-2A + 4B)\cos 2t + (-4A - 2B)\sin 2t = \cos 2t$$

係数を比較して

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{1}{5}$$

よって①の一般解は

$$y(t) = e^{-t}\{C_1 \cos t + C_2 \sin t\} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$$

また

$$x(t) = \frac{dy}{dt} = e^{-t}\{(-C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 - C_2)\sin t\} + \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{2}{5}\cos 2t$$

(2)

$y(0) = 0$ より

$$C_1 = \frac{1}{10}$$

$x(0) = 0$ より

$$C_2 = -\frac{3}{10}$$

よって

$$x(t) = \frac{dy}{dt} = e^{-t}\{-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\} + \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{2}{5}\cos 2t$$

$$y(t) = e^{-t}\{\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t\} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(t) &= \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{2}{5}\cos 2t \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2t + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2t\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left\{2t - \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left\{2t + \left(2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \omega = 2, \quad \theta = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

第 3 問

(1)

固有方程式は $|A - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$ より

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

よって固有値は 1, 3, 4

(2)

$$A\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである

$$A\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである

これらより求める対称行列は

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A &= P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \\ A^{-1} &= P^{-1} \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ A &= P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{P} \\ &= \cdots \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/2 \\ 5/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} (1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \cdots \\ &= \begin{pmatrix} (-1/3)^n 2 - 1 \\ 2(1/4)^n \\ (1/3)^n 2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$