東北大学工学部 平成 27 年実施 数学 過去問回答

高専生向け大学編入サポート
サポーター：RW

2021/03/23

問題 I

問 1

(a)

$\log_a b = r$ とおくと

$$a^r = b$$
$$\log_c a^r = \log_c b$$
$$r \log_c a = \log_c b$$
$$r = \frac{log_c b}{log_c a}$$
$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

よって示せた

(b)

$$\log_a x = 2x$$
$$\frac{log_a x}{x} = 2$$
$$\frac{\ln x}{x \ln a} = 2$$
$$\frac{\ln x}{x} = 2 \ln a$$

より、$y = \frac{lnx}{x}$ と $y = 2lna$ のグラフの交点を考える

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

となるのは $x = e$ のときよって $x = e$ のとき極大値 e をとる $y = \frac{lnx}{x}$ と $y = 2 \ln a$ のグラフの交点が $(e, \frac{1}{e})$ のみのとき、実数解を 1 つだけ持つ

$$\therefore \frac{1}{e} = 2 \ln a$$
$$\ln a = \frac{1}{2e}$$
$$a = e^{\frac{1}{2e}}$$

問 2

(a)

$x^2 + y^2 = 1,\ \sqrt{2}x^2 = y$ の交点は

$$\sqrt{2}(1 - y^2) = y$$
$$\sqrt{2}y^2 + y - \sqrt{2} = 0$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 = 1 - y^2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって求める面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}x^2\right) dx &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2}x^2 dx \\
&= \cdots \quad (\text{求め方省略}) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(b)

グラフより明らかに $\overline{x} = 0$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{S}\iint_D ydxdy \\
&= \frac{1}{S}\left\{-\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}x^2}^{\sqrt{1-x^2}} ydydx\right\} \\
&= \cdots \\
&= -\frac{11\sqrt{2}}{30S}
\end{aligned}$$

問題 II

問 1

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1\ a_5 = 2,\ a_6 = 3,\ a_7 = 5,\ a_8 = 8,\ \cdots$$

は a_3 からフィボナッチ数列になっている

そこで $n = 3,\ 4,\ \cdots$ のとき $N = n - 2$ とおき、このとき $a \to a'$ で表す

$$a'_{N+2} = a'_{N+1} + a'_N \quad a'_1 = a'_2 = 1$$

この漸化式を解く

$$a'_{N+2} - \alpha a'_{N+1} = \beta\left\{a'_{N+1} - \alpha a'_N\right\}$$
$$a'_{N+2} = (\alpha+\beta)a'_{N+1} - \alpha\beta a'_N$$

これを始めの漸化式と比較して

$$\alpha + \beta = 1, \quad -\alpha\beta = 1$$
$$\therefore \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

これより

$$a'_{N+2} - \beta a'_{N+1} = \alpha\left\{a'_{N+1} - \beta a'_N\right\}$$

も成り立つ。また

$$\begin{aligned} a'_{N+1}-\alpha a'_N &= \beta\left\{a'_{N+1}-\alpha a'_N\right\} \\ &= (a'_2-\alpha a'_1)\beta^{n-1} \qquad = (1-\alpha)\beta^{n-1} = \beta^n \\ a'_{N+1}-\beta a'_N &= \alpha\left\{a'_{N+1}-\beta a'_N\right\} \\ &= (a'_2-\beta a'_1)\alpha^{n-1} \qquad = (1-\beta)\alpha^{n-1} = \alpha^n \end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)a'_n = \alpha^n-\beta^n$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots) \end{cases}$$

問 2

収束するときの実数 x の範囲とその数列の極限は

$$\begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (-1<x\leq 2) \end{cases}$$

となることが予想される。これらを証明する

まず $x=2$ のときを考える

このとき $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ を証明すればよい

すなわち $1^n=1$ を示せば十分であり、これは数学的帰納法より自明である

次に $-1<x<2$ のときを考える

このとき $\frac{2x-1}{3}=r$ とおくと $-1<r<1$ である

すなわち $r<|1|$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を示す

また、ε-N 論法を用いる

正の実数 ε を任意にとる

$|r^k-0|<\varepsilon$ となる k を考える

$$|r^k|<\varepsilon$$

$$|r| = \frac{1}{R}\text{とおくと}|r|<1\text{より}R>1$$

$$\therefore R = 1+d \ \ (d>0)$$

$$|r^k|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{(1+d)^k}<\varepsilon$$

ここで

$$\frac{1}{(1+d)^k} \leq \frac{1}{kd}$$

よって $\frac{1}{Nd} < \varepsilon$ となるような N を考えたとき、$n \geq N$ となる各 n に対し

$$\frac{1}{nd} < \varepsilon$$

が成り立つ

よって $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{2x-1}{3} = 0 \quad (-1 < x < 2)$

証明終了

問 3

まず $\lim_{x\to 0} \ln \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \right\}$ を求める

$$\lim_{x\to 0} \ln \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形であり分母分子をそれぞれ微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形であり分母分子をそれぞれ微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x(\sin x - 2x\cos x)}$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形であり分母分子をそれぞれ微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x(\sin x + 2x\cos x) + \sin x(\cos x + 2\cos x - 2x\sin x)}$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形であり分母分子をそれぞれ微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + x\sin x}{-\sin x(\sin x + 2x\cos x) + 2\cos x(\cos x + 2\cos x - 2x\sin x) + \sin x(-5\sin x - 2x\cos x)}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

となり収束するので、それぞれの段階でロピタルの定理を適用できる

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \right\} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$$