H25年度　東京海洋大学

$\boxed{\text{I}}$

(1)
$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{vmatrix} \underset{\substack{②-①\times2\\③-①\\④-①}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-5&-6\\0&-1&-2&-5\\0&-2&-5&-10\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1&5&6\\1&2&5\\2&5&10\end{vmatrix} \underset{\substack{②-①\\③-①\times2}}{=} (-1)\begin{vmatrix}1&5&6\\0&-3&-1\\0&-5&-2\end{vmatrix}$$
$$= (-1)\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix} = -1$$

(2) 拡大係数行列

$$A = \begin{pmatrix}3&2&-5&4&3&5\\2&3&-5&1&7&5\\1&1&-2&1&2&2\end{pmatrix}$$ を行基本変形する.

$$A \xrightarrow[\substack{①-③\times3\\②-③\times2}]{} \begin{pmatrix}0&-1&1&1&-3&-1\\0&1&-1&-1&3&1\\1&1&-2&1&2&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[①+②]{} \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&-1&-1&3&1\\1&1&-2&1&2&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[③-②]{} \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&-1&-1&3&1\\1&0&-1&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x-z+2u-v=1\\y-z-u+3v=1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2b+c+1\\a+b-3c+1\\a\\b\\c\end{pmatrix}$$　$(a, b, c$ は実数$)$

$\boxed{\text{II}}$　$A = \begin{pmatrix}5&-2&-2\\1&2&-1\\3&-4&1\end{pmatrix}$ の固有方程式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}5-\lambda&-2&-2\\1&2-\lambda&-1\\3&-4&1-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+8+6+6(2-\lambda)-4(5-\lambda)+2(1-\lambda)$$
$$= (\lambda^2-7\lambda+10)(1-\lambda)+14+12-6\lambda-20+4\lambda+2-2\lambda$$
$$= \lambda^2-7\lambda+10-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda-4\lambda+8$$
$$= -\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18$$ ← $\lambda=2$ とすると 0 になるので $\lambda-2$ を因数にもつ
$$= -(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9)$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda-3)^2 = 0$$ より

固有値は $2, 3$

(1) 固有値 2

$$A-2E = \begin{pmatrix}3&-2&-2\\1&0&-1\\3&-4&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①-②\times3\\③-②\times3}]{} \begin{pmatrix}0&-2&1\\1&0&-1\\0&-4&2\end{pmatrix} \xrightarrow[③-②\times2]{} \begin{pmatrix}0&-2&1\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2y+z=0\\x-z=0\end{cases}$$

よって固有値 2 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\\frac{a}{2}\\a\end{pmatrix}$$　$(a \neq 0)$

(ii) 固有値 3

$$A-3E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①-②\times 2 \\ ③-②\times 3}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②-③]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

よって固有値 3 に対応する固有ベクトルは.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ b \end{pmatrix} \qquad (b \neq 0)$$

$\boxed{\text{III}}$

(1)
$$\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{2x^2-x^2+2}{x^3-1}\,dx = \int\left(\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{2x^2-2}{x^3-1}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$
$$= \int\left\{\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}\right\}dx$$
$$= \log|x^3-1| - \log|x^2+x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

(2)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$
$$= \lim_{\beta\to\infty}\left[x - \log(1+e^x)\right]_0^{\beta}$$
$$= \lim_{\beta\to\infty} \beta - \log(1+e^{\beta}) + \log 2$$
$$= \lim_{\beta\to\infty} \log e^{\beta} - \log(1+e^{\beta}) + \log 2$$
$$= \lim_{\beta\to\infty} \log\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}} + \log 2$$
$$= \log\frac{1}{1/e^{\beta}+1} + \log 2$$
$$= \log 1 + \log 2 = \log 2$$

$\boxed{\text{IV}}$

$f_x = 28x^3 - 16xy - 16x + 4y$

$f_y = -8x^2 + 4x + 4y$

$f_{xx} = 84x^2 - 16y - 16$

$f_{xy} = f_{yx} = -16x + 4$

$f_{yy} = 4$

極値をとる点では

$$\begin{cases} f_x = 28x^3 - 16xy - 16x + 4y = 0 \\ f_y = -8x^2 + 4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 - 4xy - 4x + y = 0 & \cdots ① \\ -2x^2 + x + y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より $y = 2x^2 - x$

① に代入すると

$x(x-5)(x-1) = 0$

よって極値をとりうる点は,

$(x, y) = (0, 0), (1, 1), (5, 45)$

ヘッシアン $H(x, y)$ は $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

(i) $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -16 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} < 0$$

(ii) $(x, y) = (1, 1)$ のとき

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 84 - 16 - 16 & -16 + 4 \\ -16 + 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 52 & -12 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

$f_{xx} = 52 > 0$

(iii) $(x, y) = (5, 45)$ のとき

$$H(5, 45) = \begin{vmatrix} 84 \cdot 25 - 16 \cdot 45 - 16 & -16 \cdot 5 + 4 \\ -16 \cdot 5 + 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1364 & -76 \\ -76 & 4 \end{vmatrix} = 5456 - 5776 < 0$$

よって $f(x, y)$ は $(x, y) = (1, 1)$ で

極小値 $f(1, 1) = -3$ をとる.

$\boxed{V}$

(1) $\int_0^2 \int_0^x x e^y \, dy \, dx$

$= \int_0^2 x [e^y]_0^x \, dx$

$= \int_0^2 x(e^x - 1) \, dx$

$= \int_0^2 (xe^x - x) \, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx$

$= -2 + 2e^2 - [e^x]_0^2$

$= -2 + 2e^2 - e^2 + 1$

$= e^2 - 1$

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

Dは $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 , 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に移る。

また、ヤコビアンは r

よって $\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta \, dr \, d\theta$

$= \left[\frac{1}{6} r^6\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2$

$= \frac{64}{6} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta$

$= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \, d\theta$

$= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{8}{3}\pi$