東京工業大学工学部 平成 29 年実施 数学 過去問回答

高専生向け大学編入サポート
サポーター：HS

2021/04/12

1

(1)

拡大係数行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 & a+3 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を行基本変形により階段行列に変形する。

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 & a+3 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2-a & 2+a & -a+3 \\ 0 & -1 & a+2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 2-a & 2+a & -a+3 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+2)^2 & -a+3 \end{pmatrix} \qquad ①
\end{aligned}
$$

したがって、連立一次方程式が解をもつための必要十分条件は $a \neq \pm 2$

(2)

$$
① \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-(a+1)(-a+3)}{(a-2)(a+2)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a+3}{(a-2)(a+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+3}{(a-2)(a+2)^2} \end{pmatrix}
$$

したがって

$$
\begin{cases} x = \dfrac{-(a+1)(-a+3)}{(a-2)(a+2)^2} \\ y = \dfrac{-a+3}{(a-2)(a+2)} \\ z = \dfrac{-a+3}{(a-2)(a+2)^2} \end{cases}
$$

2

A^2 の固有方程式 $|A^2 - \lambda E|$ を解く。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 27-\lambda & -26 & -10 \\ 13 & -12-\lambda & -5 \\ 10 & -10 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -26 & -10 \\ 1-\lambda & -12-\lambda & -5 \\ 0 & -10 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -12-\lambda & -5 \\ -10 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (1-\lambda)\begin{vmatrix} -26 & -10 \\ -10 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-12-\lambda)(-1-\lambda) - 50 + 26(-1-\lambda) + 100 \\
&= (1-\lambda)(12 + 13\lambda + \lambda^2 + 50 - 26 - 26\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 36) \\
&= (1-\lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 9)
\end{aligned}
$$

よって $\lambda = 1, 4, 9$ ここで A の固有値を α、α に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \alpha\boldsymbol{x} \\ AA\boldsymbol{x} &= A\alpha\boldsymbol{x} \\ A^2\boldsymbol{x} &= \alpha A\boldsymbol{x} \\ A^2\boldsymbol{x} &= \alpha\lambda\boldsymbol{x} \\ A^2\boldsymbol{x} &= \alpha^2\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

以上より A の固有値は正であることから $1, 2, 3$

(i)

A^2 の固有値 1 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$

$$A - E = \begin{pmatrix} 26 & -26 & -10 \\ 13 & -13 & -5 \\ 10 & -10 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

(ii)

A^2 の固有値 4 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} 23 & -26 & -10 \\ 13 & -16 & -5 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

(iii)

A^2 の固有値 9 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 18 & -26 & -10 \\ 13 & -21 & -5 \\ 10 & -10 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_3 = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

ここで $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}A^2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{aligned} A &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3

停留点では

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4(x^3 - 2x + 2y) = 0 \\ f_y(x,y) = 4(2x + y^3 - 2y) = 0 \end{cases}$$

これを解くと

$(x,y) = (0,0),\ (2,-2),\ (-2,2)$

$H(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ とおくと

(i)

点 $(0,0)$ について

$H(0,0) = 0$

ヘッシアンでは判定できない

$y = x$ のもとで $f(x,y)$ を考えると

$f(x,x) = x^4 + y^4 > 0$

$y = -x$ のもとで $f(x,y)$ を考えると

$f(x,-x) = x^4 + y^4 - 4x^2$ 例えば $(x,y) = (1,-1)$ のとき $f(1,-1) = -2 < 0$

よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ において極値をとらない

(ii)

点 $(2,-2),\ (-2,2)$ について

$H(2,-2) = H(-2,2) > 0$

$f_{xx}(2,-2)=f_{xx}(-2,2)>0$ よって $f(x,y)$ は $(2,-2),\ (-2,2)$ において極小値をとる

したがって $f(x,y)$ において (x,y) が条件 $x^2+y^2=9$ を満たして動くとき $f(x,y)$ は最大値をとる

$g(x,y)=x^2+y^2-9=0$ とおく
$g_x(x,y)=2x,\quad g_y(x,y)=2y$
よって $x^2+y^2-9=0$ の下では、$g_x(x,y)\neq 0$ または $g_y(x,y)\neq 0$ が成り立つ
よってラグランジュの未定乗数法より
$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるとすると、次を満たす λ が存在する

$$\begin{cases} 4(a^3-2a+2b)=\lambda\cdot 2a \\ 4(2a+b^3-2b)=\lambda\cdot 2b \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$$

これを解けば 4 点で最大値 53 をとる
したがって最大値 53、最小値 -32

4

$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$ とおくと D は $E:0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leq 2\pi$ に移る
ヤコビアンは abr よって

$$\begin{aligned}
&\iint_D x^4dxdy \\
&\qquad=\int_0^{2\pi}\int_0^1 a^4r^4\cos^4\theta\cdot abrdrd\theta \\
&\qquad=\frac{1}{6}a^5b\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta \\
&\qquad=\frac{1}{8}a^5b\pi
\end{aligned}$$