$\boxed{1}$

(1) rank $H = 4$であるか確認する.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{④}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{①}\times 5 \\ \text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}\times 4}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}\times(-1) \\ \text{④}\div 3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{③}+\text{②}\times 4 \\ \text{④}-\text{②}}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}\leftrightarrow\text{④}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{③}\times 4]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

rank $H = 4$　　よって正則である.

他の方法
- 逆行列の存在を示す
- 行列式が非零　etc...

(2) キーワード　行列のブロック分割

(i) 行列の積と同様にして

$$PQ = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ & AW \\ BX + CZ & BY + CW \end{pmatrix}$$

(ii) $PP^{-1} = E_{2n}$となるようなP^{-1}を見つければよい. (E_N は $N\times N$単位行列)

また(1)と同様にすれば rank $P = 2n$であり Pは正則なので逆行列を持つ.

(i)を利用する. $P^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ とすると

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} AZ & AW \\ BX + CZ & BY + CW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

A, Bは正則だから逆行列を持つ

- $AZ = E_n$ より　$Z = A^{-1}$
- $AW = O$ より　$W = O$
- $BY + CW = BY = E$ より $Y = B^{-1}$
- $BX + CZ = BX + CA^{-1} = O$

$\Leftrightarrow BX = -CA^{-1}$

$\Leftrightarrow X = -B^{-1}CA^{-1}$

したがって

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

(1) $f'(x) = a - \frac{1}{x}$

$g'(x) = 2x - ae^{x}$

(2) $f'(x) = a - \frac{1}{x} = 0$ となる x を求める.

$f'(x) = a - \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $ax = 1$

$x = \frac{1}{a}$

$e = 2.7\cdots > 2$ だから

$\log 2 < 1$ より $\frac{1}{a} > 1$

$\sqrt{e} < 2$ より $\log 2 > 0.5$

よって $1 < \frac{1}{a} < 2$

また, $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ より

$f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ で 最小値 $f(\frac{1}{a}) = 1 - a - \log\frac{1}{a} = 1 - a - \log 1 - \log a = 1 - a - \log a$

$f(x)$ は $x < \frac{1}{a}$ で単調減少, $x > \frac{1}{a}$ で単調増加するので

始点, 終点における $f(x)$ の値を調べる

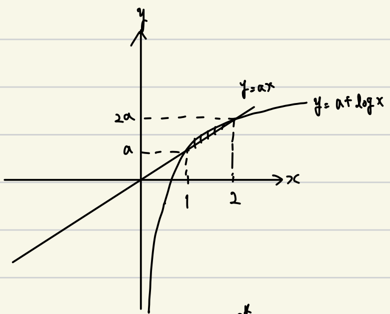
$f(1) = a\cdot 1 - a - \log 1 = a - a = 0$

$f(2) = a\cdot 2 - a - \log 2 = 2a - a - a = 0$

よって $f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ で最小値 $1 - a - \log a$

$x = 1, 2$ で最大値 0 をとる.

(3) $I = \int_1^2 \left(\int_{ax}^{a+\log x} \sin(g(y))\, dy \right) dx$



$y = ax \Leftrightarrow x = \frac{y}{a}$

$y = a + \log x \Leftrightarrow e^{y} = e^{a}\cdot e^{\log x} = e^{a}x = 2x$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^{y}}{2}$

したがって $I = \int_a^{2a} \int_{\frac{y}{a}}^{\frac{e^y}{2}} \sin(y^2 - ae^{y})\, dx\, dy$

(4) $I = \int_a^{2a} \int_{\frac{y}{a}}^{\frac{e^y}{2}} \sin(y^2 - ae^{y})\, dx\, dy$

$= \int_a^{2a} \left(\frac{e^{y}}{2} - \frac{y}{a} \right) \cdot \sin(y^2 - ae^{y})\, dy$

$= \frac{1}{2a} \int_a^{2a} -(2y - ae^{y}) \sin(y^2 - ae^{y})\, dy$

$= \frac{1}{2a} \left[\cos(y^2 - ae^{y}) \right]_a^{2a} = \frac{1}{2a} \left[\cos(4a^2 - 4a) - \cos(a^2 - 2a) \right]$